ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ, ПОРОЖДАЕМОЕ ОПЕРАТОРОМ, НЕ ОБЛАДАЮЩИМ СВОЙСТВОМ НЕПРЕРЫВНОСТИ В ТОЧКЕ [1]

© **А. И. Булгаков, И. В. Шлыкова**

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что оператор $P : C^n[a,b] \to \text{Ł}_1^n[a,b]$ вольтерров по А.Н. Тихонову (или просто вольтерров), если из условия $x = y$ на отрезке $[a,\tau]$ $(\tau \in (a,b])$ следует равенство $P(x)|_\tau = P(y)|_\tau$, где $P(z)|_\tau$ — сужение функции $P(z)$ на отрезок $[a,\tau]$.

Пусть K — метрическое пространство.

О п р е д е л е н и е 2. Непрерывное отображение $P : (0,1]\times C^n[a,b]\times K \to \text{Ł}_1^n[a,b]$ обладает свойством $\mathcal{A}$, если оно удовлетворяет следующим условиям : 1) для каждых ограниченных множеств $U \subset C^n[a,b]$ и $E \subset K$ образ $P\big((0,1] \times U \times E\big)$ ограничен суммируемой функцией; 2) для любых $\tau \in (0,1]$, $\lambda \in K$ оператор $P(\tau,\cdot,\lambda)$ вольтерров по А.Н. Тихонову.

Отметим, что если отображение $P(\cdot,\cdot,\cdot)$ обладает свойством $\mathcal{A}$, то оператор $P(\cdot,\cdot,\cdot)$ может быть неопределен в точке 0 или может не обладать свойством непрерывности в этой точке. Построим по оператору $P(\cdot,\cdot,\cdot)$ многозначное отображение, которое определено в точке 0 и замкнуто в слабой топологии пространства суммируемых функций.

Определим это отображение $\widetilde{P}(0,\cdot,\cdot) : C^n[a,b] \times K \to \Omega(L_1^n[a,b])$ равенством

$$\widetilde{P}(0,x,\lambda) = \bigcap_{\delta\in(0,1]} \overline{co} P\big((0,\delta] \times B_C[x,\delta] \times B_K[\lambda,\delta]\big), \tag{1}$$

где $B_C[x,\delta]$ $(B_K[\lambda,\delta])$ — замкнутый шар пространства $C^n[a,b]$ (пространства K) в точке $x \in C^n[a,b]$ (в точке $\lambda \in K$) и радиусом δ.

Рассмотрим задачу Коши для функционально-дифференциального включения, которое зависит от параметра $\lambda \in K$,

$$\dot{x} \in \widetilde{P}(0,x,\lambda), x(a) = x_0. \tag{2}$$

Пусть $\tau \in (a,b]$. Определим непрерывное отображение $V_\tau : C^n[a,\tau] \to C^n[a,b]$ равенствами

$$(V_\tau x)(t) = \begin{cases} x(t), \text{ если } t \in [a,\tau], \\ x(\tau), \text{ если } t \in (\tau,b]. \end{cases} \tag{3}$$

О п р е д е л е н и е 3. Абсолютно непрерывная функция $x : [a,\tau] \to R^n$ является решением задачи (2) на отрезке $[a,\tau]$, если x удовлетворяет включению $\dot{x} \in (\widetilde{P}(0,V_\tau x,\lambda))|_\tau$ и равенству $x(a) = x_0$, где непрерывное отображение $V_\tau : C^n[a,\tau] \to C^n[a,b]$ имеет вид (3). Будем говорить, что абсолютно непрерывная на каждом отрезке $[a,\tau] \subset [a,c)$, $c \in (a,b]$, функция $x : [a,c) \to R^n$ является решением задачи (2) на $[a,c)$, если для каждого $\tau \in (a,c)$ сужение функции x на отрезок $[a,\tau]$ является решением задачи (2) на $[a,\tau]$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-01-00305), темплана № 1.6.07 и Государственного образовательного фонда Норвегии.

Определим отображения $\Lambda : L_1^n[a,b] \to C^n[a,b]$ и $\Phi(0,\cdot,\cdot) : C^n[a,b] \times K \to \Omega(C^n[a,b])$ равенствами

$$(\Lambda z)(t) = \int_a^t z(s)ds, t \in [a,b], \qquad \Phi(0,x,\lambda) = x_0 + \Lambda \widetilde{P}(0,x,\lambda). \tag{4}$$

Для любого $\tau \in (a,b]$ зададим оператор $\Phi_\tau(0,\cdot,\cdot) : C^n[a,b] \times K \to \Omega(C^n[a,\tau])$ соотношением

$$\Phi_\tau(0,x,\lambda) = x_0 + (\Phi(0,V_\tau x,\lambda))|_\tau, \tag{5}$$

где непрерывный оператор $V_\tau : C^n[a,\tau] \to C^n[a,b]$ имеет вид (3) и отображение $\Phi(0,\cdot,\cdot) : C^n[a,b] \times K \to \Omega(C^n[a,b])$ имеет вид (4).

Из равенства (5) вытекает, что решение включения $x \in \Phi_\tau(0,x,\lambda)$ эквивалентно решению задачи (2) на отрезке $[a,\tau]$.

Пусть $H(x_0,\lambda,\tau)$ $(\lambda \in K)$ — множество всех локальных решений задачи (2) на отрезке $[a,\tau]$ $(\tau \in (a,b])$.

Будем говорить, что множество всех локальных решений (2) априорно ограничено, если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a,b]$ не существует решения $y \in H(x_0,\lambda,\tau)$, для которого выполняется неравенство $\|y\|_{C^n[a,\tau]} > r$.

Т е о р е м а 1. *Пусть множество всех локальных решений задачи* (2) *априорно ограничено. Тогда для любого $\tau \in (a,b]$ множество $H(x_0,\lambda,\tau) \neq \emptyset$ и существует такое $r > 0$, что для каждых $\tau \in (a,b]$, $y \in H(x_0,\lambda,\tau)$ $(\lambda \in K)$ выполняется неравенство $\|y\|_{C^n[a,\tau]} \leqslant r$.*

Л е м м а 1. *Пусть непрерывное отображение $M : [0,1] \times C_+^1[a,b] \times K \to L_+^1[a,b]$ обладает свойствами:* 1) *для любых $\kappa \in [0,1]$, $\lambda \in K$ оператор $M(\kappa,\cdot,\lambda)$ вольтерров по А.Н. Тихонову и изотонен;* 2) *для любых $\kappa \in (0,1]$, $t \in (a,b]$, $x \in C^n[a,b]$, $\lambda \in K$ выполняется оценка*

$$\|P(\kappa,x,\lambda)\|_{L_1^n[a,t]} \leqslant \|M(\kappa,Zx,\lambda)\|_{L_1^1[a,t]}. \tag{6}$$

Тогда для любого $t \in (a,b]$, $x \in C^n[a,b]$, $\lambda \in K$, $y \in \widetilde{P}(0,x,\lambda)$ справедливо соотношение

$$\|y\|_{L_1^n[a,t]} \leqslant \|M(0,Zx,\lambda)\|_{L_1^1[a,t]}, \tag{7}$$

где отображение $\widetilde{P}(0,\cdot,\cdot) : C^n[a,b] \times K \to \Omega(L_1^n[a,b])$ задано равенством (1).

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что непрерывное отображение

$$P : (0,1] \times C^n[a,b] \times K \to L_1^n[a,b]$$

обладает свойством $\mathcal{B}$, если для него выполняется свойство $\mathcal{A}$ и существует непрерывное отображение $M : [0,1] \times C_+^1[a,b] \times K \to L_+^1[a,b]$, удовлетворяющее условиям 1), 2) леммы 1, причем задача

$$\dot{y} = M(0,y,\lambda), \;\; y(a) = |x_0|, \;\; \lambda \in K \tag{8}$$

имеет верхнее решение, где x_0 — начальное условие задачи (2).

Т е о р е м а 3. *Пусть непрерывное отображение $P : (0,1] \times C^n[a,b] \times K \to L_1^n[a,b]$ обладает свойством $\mathcal{B}$. Тогда для любого решения задачи* (2) *для любого $t \in [a,b]$ выполняется оценка $|x(t)| \leqslant \xi(t)$, где $\xi(\cdot)$ — верхнее решение задачи* (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bulgakov A.I., Maksimov V.P.* Functional and functional differential inclusions with Volterra operators // Differential equations. 1981. V. 17, № 8. P. 881–890.

Булгаков Александр Иванович
Тамбовский государственный ун-т
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Шлыкова Ирина Викторовна
Norwegian University of Life Sciences (UMB)
Norway, Ås
e-mail: irina.shiv@rambler.ru

Поступила в редакцию 7 мая 2007 г.

КОНВЕРГЕНТНОСТЬ И АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С МОНОТОННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© **И. М. Буркин**

Будем говорить, что система

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t),\ x \in R^n,\ t \in (-\infty,\infty)$$

обладает свойством конвергенции [1] (является конвергентной), если все ее решения $x(t,s,\bar{x})$ определены при $s \leqslant t < \infty$ и существует единственное ограниченное на всей оси $t \in (-\infty,\infty)$ решение $x_0(t)$ этой системы, которое является асимптотически устойчивым в целом при $t \to +\infty$, то есть для любого решения $x(t,s,\bar{x})$ справедливо соотношение $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t,s,\bar{x}) - x_0(t)| = 0$.

Рассмотрим математическую модель нелинейной системы автоматического управления с нестационарной линейной частью

$$\begin{array}{l} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = \varphi(t,\sigma), \\ \sigma = c_1(t)x + c_2(t)x' + \cdots + c_n(t)x^{(n-1)}. \end{array} \qquad (1)$$

Здесь $a_i(t)$ и $c_i(t)$ — ограниченные на $(-\infty,\infty)$ непрерывные функции, $\varphi(t,\sigma)$ — непрерывная по t и непрерывно дифференцируемая по σ функция, удовлетворяющая соотношениям

$$0 \leqslant \frac{\partial\varphi(t,\sigma)}{\partial\sigma} \leqslant \gamma,\ \sigma \in (-\infty,\infty),\ \gamma > 0. \qquad (2)$$

Пусть $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ — некоторые числа, $p(t,\lambda) = \lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \cdots + a_n(t)$. Введем обозначения:

$$\Delta_0(t,\lambda_1) = p(t,\lambda_1), \Delta_i(t,\lambda_1,\ldots,\lambda_{i+1}) =$$
$$= [\Delta_{i-1}(t,\lambda_1,\ldots,\lambda_i) - \Delta_{i-1}(t,\lambda_2,\ldots,\lambda_{i+1})](\lambda_1 - \lambda_{i+1})^{-1}, i = \overline{1,n-2},$$